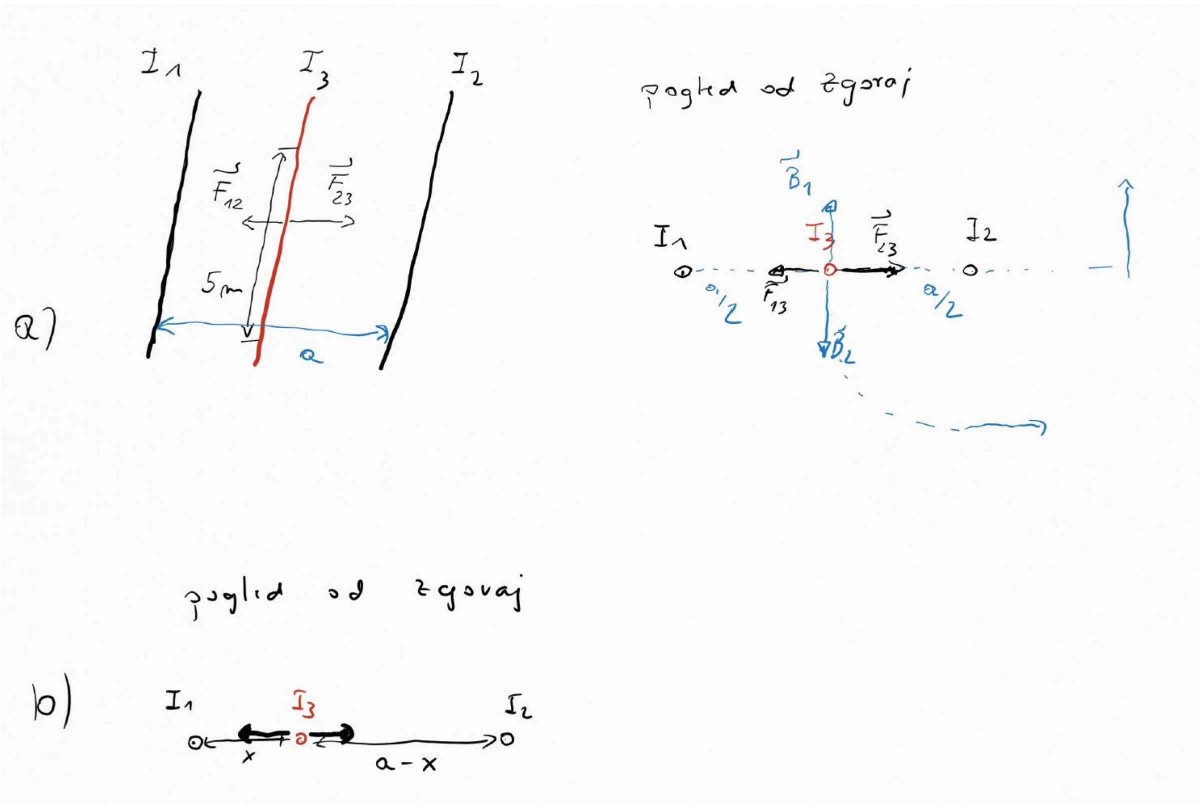
Različne naloge, FMF

Če je kakšna računaska ali druga napaka pri rešitvah, prosim, sporočite jo na elektronski naslov

`info@fizika.si`

1. **Po dveh vzporednih, ravnih in zelo dolgih vodnikih, ki sta oddaljena $a = 1\,\mathrm{m}$ tečeta tokova $I_1 = 1\,\mathrm{A}$ in $I_2 = 2\,\mathrm{A}$ v enaki smeri. Tretji vodnik je vzporeden s prvima dvema, leži v isti ravnini, po njem teče tok $I_3 = 3\,\mathrm{A}$ v isti smeri kot po prvih dveh. Kolikšna magnetna sila deluje na $l = 5\,\mathrm{m}$ dolg odsek tretjega vodnika, če je ta na sredini med prvim on drugim vodnikom? Kam v ravnini prvih dveh vodnikov moramo postaviti tretjega, da bo vsota magnetnih sil nanj enaka nič?**

   Najprej narišimo vodnike.



Silo na vodnik v magnetnem polju izračunamo kot

$$\vec{F} = I\,\vec{l} \times \vec{B}.$$

Več o tem je tukaj:

`http://www.fizika.si/GimUni/2020GimnazijaLitija.pdf`

Magnetno polje B na mestu tretjega vodnika ustvarjata prvi in drugi vodnik:

$$B = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\, r},$$

kjer je $I = I_1$ ali I_2 in $r = a/2$, ker je tretji vodnik na sredi med prvima dvema.

Polje $B_1 = \frac{\mu_0 \, I_1}{2 \, \pi \, \frac{a}{2}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \, \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}} \cdot 1\,\mathrm{A}}{2 \cdot \pi \cdot 0{,}5\,\mathrm{m}} = 4 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{T}$.

Polje $B_2 = \frac{\mu_0 \, I_2}{2 \, \pi \, \frac{a}{2}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \, \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}} \cdot 2\,\mathrm{A}}{2 \cdot \pi \cdot 0{,}5\,\mathrm{m}} = 8 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{T}$.

Ko preračunamo smer vektorskega produkta, ugotovimo, da prvi vodnik privlači tretjega k sebi s silo F_{13}. Prav tako drugi vodnik privlači tretjega k sebi, le da z večjo silo, ker ustvarja večje magnetno polje na mestu tretjega vodnika. V splošnem velja, da če po vodnikoma tečeta tokova v isti smeri, da se privlačita.

Sila $F_{13} = l \, I_3 \, B_1 = 5\,\mathrm{m} \cdot 3\,\mathrm{A} \cdot 4 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{T} = 6 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N}$.

Sila $F_{23} = l \, I_3 \, B_2 = 5\,\mathrm{m} \cdot 3\,\mathrm{A} \cdot 8 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{T} = 12 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N}$.

Sili F_{13} in F_{23} delujeta na tretji vodnik v nasprotnih smereh, zato je celotna sila na 5 m dolg odsek tretjega vodnika enaka

$$F = F_{23} - F_{13} = 12 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N} - 6 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N} = 6 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N}$$

proti drugemu vodniku.

Kam moramo premakniti tretji vodnik, da bo magnetna sila na nanj enaka nič? Vzporedno ga moramo premakniti bliže prvemu vodniku, da bosta magnetni polji B_1 in B_2, ki ju ustvarjata prvi in drugi vodnik, nasprotno enaki. Na sliki b) smo razdaljo od prvega vodnika označili z x. Veljati torej mora:

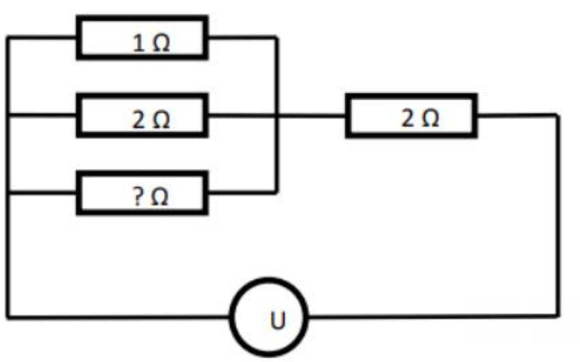
$$\frac{\mu_0 \, I_1}{2 \, \pi \, x} = \frac{\mu_0 \, I_2}{2 \, \pi \, (a - x)}.$$

Iz zadnje enačbe izrazimo

$$x = \frac{I_1}{I_1 + I_2} \, a = \frac{1\,\mathrm{A}}{1\,\mathrm{A} + 2\,\mathrm{A}} \, 1\mathrm{m} = 0{,}333\,\mathrm{m}.$$

Do bo vsota magnetnih sila na tretji vodnik enaka nič, ga moramo postaviti vzporedno s prvima dvema na razdalji 33,3 cm od prvega in 66,7 m od drugega vodnika.

2. **Dva upornika z uporom $1\,\Omega$ in $2\,\Omega$ in en upornik z neznano vrednostjo upora vežemo vzporedno. K temu dodamo zaporedno še četrti upornik z uporom $2\,\Omega$. Pri gonilni napetosti 10 V se na takem vezju troši moč 40 W. Izračunaj vrednost neznanega upora.**

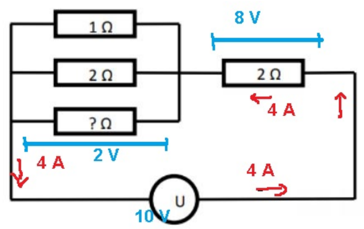


Nalogo rešimo v več korakih. Poznamo napetost $U = 10\,\mathrm{V}$ in moč $P = 40\,\mathrm{W}$, ki se troši v vezju. Ta podatka nam povesta, da skozi generator (baterijo) teče tok:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{40\,W}{10\,\mathrm{V}} = 4\,\mathrm{A}.$$

Uporabili smo zvezo $P = U\,I$ za moč, ki se troši na bateriji ali jo oddaja generator skozi katerega teče tok I in je na njemu napetost U.

Tok $I = 4\,\mathrm{A}$ teče skozi generator in očitno tudi skozi upor $2\,\Omega$, saj med ni razvejišča med njima. Narisano spodaj:



Zdaj vemo, da skozi upor $2\,\Omega$ teče tok $4\,\mathrm{A}$. Pomeni, da je na njem padec napetosti $U_4 = I\,R = 4\,\mathrm{A} \cdot 2\,\Omega = 8\,\mathrm{V}$. Tudi to smo že narisali na prejšnji sliki.

Na generatorju je napetost $10\,\mathrm{V}$, na uporu $2\,\Omega$ napetost pade za $8\,\mathrm{V}$, sledi, da na treh vzporedno vezanih uporih napetost pade še za $2\,\mathrm{V}$! Tudi to je že označeno na prejšnji sliki.

Ker so trije upori vezani vzporedno, pomeni, da je na vsakem od njih padec napetosti $2\,\mathrm{V}$.

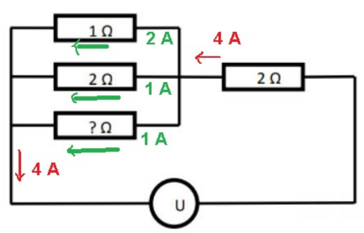
Skozi zgornjega ($1\,\Omega$) teče tok

$$I_1 = \frac{2\,\mathrm{V}}{1\,\Omega} = 2\,\mathrm{A}.$$

Skozi srednjega ($2\,\Omega$) teče tok

$$I_1 = \frac{2\,\mathrm{V}}{2\,\Omega} = 1\,\mathrm{A}.$$

Skozi spodnjega (neznanega) mora očitno teči $4\,\mathrm{A} - 2\,\mathrm{A} - 1\,\mathrm{A} = 1\,\mathrm{A}$, saj mora biti vsota tokov skozi tri vzporedno vezane upornike enaka toku skozi "glavno" vejo. To je narisano na spodnji sliki.



Za neznani upor zdaj vemo, da je na njemu padec napetosti $2\,\mathrm{V}$ in skozi njega teče tok $1\,\mathrm{A}$. Pomeni, da je njegova upornost enaka:

$$R_{neznani} = \frac{U}{I} = \frac{2\,\mathrm{V}}{1\,\mathrm{A}} = 2\,\Omega.$$

3. **Iz puške izstrelimo kroglo v pokončno pritrjeno desko. Krogla zadane desko s hitrostjo $v_1 = 300\,\mathrm{m/s}$ in jo prebije. Izstopna hitrost krogle je $v_2 = 200\,\mathrm{m/s}$. Za koliko se krogla segreje, če prevzame polovico sproščene energije? Zapiši izraz za povprečno silo, ki jo čuti krogla med prebijanjem skozi desko. Kolikokrat debelejša bi morala biti deska, da bi se krogla v njej ustavila, če bi na njo delovala enaka povprečna sila? Specifična toplota kovine, iz katere je krogla, je $c = 170\,\mathrm{J/kgK}$.**

Z izrazom *sproščena energija* je mišljen del kinetične energije, ki jo krogla izgubi in je na voljo za: segrevanje krogle in deske okoli luknje ter za spreminjanje oblike deske (nastala je luknje - za to je potrebna energije). Sproščena energija je enaka:

$$\Delta W = W_{k1} - W_{k2} = \frac{m\,v_1^2}{2} - \frac{m\,v_2^2}{2} = \frac{m\,(v_1^2 - v_2^2)}{2}.$$

Sproščene energije ΔW ne moremo je izračunati, ker ne poznamo mase krogle.

Pol sproščene energije ΔW se porabi za gretje krogle. Pri gretju za ΔT moramo krogli dovesti $m\,c\,\Delta T$ energije. Torej je

$$m\,c\,\Delta T = \frac{\Delta W}{2} = \frac{m\,(v_1^2 - v_2^2)}{4}.$$

Izračunamo

$$\Delta T = \frac{v_1^2 - v_2^2}{4\,c} = \frac{(300\,\mathrm{m/s})^2 - (200\,\mathrm{m/s})^2}{4 \cdot 170\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}} = 73{,}5\,\mathrm{K}.$$

Povprečna sila: kroglici se je zmanjšala energija za ΔW zaradi povprečne sile deske na kroglico F. Pri tem je sila F morala opraviti delo:

$$A = F\,d_1 = \Delta W,$$

kjer je d_1 debelina deske. Sledi

$$F = \frac{\Delta W}{d_1} = \frac{m\,(v_1^2 - v_2^2)}{2\,d_1}.$$

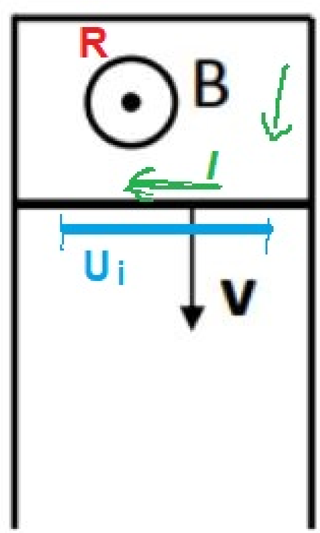
Če želimo, da se kroglica ustavi mora enako velika sila F (tako so napisali v tekstu naloge) opraviti delo $A_2 = F\,d_2$, ki bo po velikosti enako spremembi kinetične energije. Ker se naj v tem primeru kroglica ustavi, je $v_2 = 0$ in $\Delta W_k = \frac{m\,v_1^2}{2}$. Iz zveze

$$F\,d_2 = \frac{m\,v_1^2}{2}$$

izrazimo d_2 in vstavimo za povprečno silo F izraz, ki smo ga dobili prej ($F = \frac{m\,(v_1^2 - v_2^2)}{2\,d_1}$)

$$d_2 = \frac{m\,v_1^2}{2\,F} = \frac{m\,v_1^2}{2\,\frac{m\,(v_1^2 - v_2^2)}{2\,d_1}} = \frac{v_1^2}{v_1^2 - v_2^2}\,d_1.$$

4. **Dve dolgi vzporedni navpični bakreni tračnici sta zvezani z dvema vzporednima vodoravnima bakrenima prečkama, od katerih je zgornja pritrjena na krajišči tračnic, spodnja pa je brez trenja gibljiva vzdolž tračnic. Pravokotno na ravnino v kateri ležijo je usmerjeno homogeno magnetno polje z gostoto $B = 1\,\mathrm{T}$. Spodnjo prečko spustimo, da začne padati v polje in hitro doseže stalno hitrost. Kolikšna je končna hitrost padanja prečke v polju? S kolikšno silo deluje polje na prečko? Upornost spodnje prečke je $R = 0{,}1\,\Omega$, upornosti tračnic in zgornje prečke zanemari. Masa spodnje prečke je $m = 5\,\mathrm{g}$ in njena dolžina $a = 40\,\mathrm{cm}$. Za vrednost težnega pospeška uporabi $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.**



Prečka, ki pada, seka silnice magnetnega polja. Prečka stoji pravokotno na silnice, njena hitrost v navpično navzdol je pravokotna tako na dolžino prečke kakor na magnetno polje. Takrat se na krajiščih prečke inducira napetost:

$$U_i = a\, v\, B.$$

Zaradi inducirane napetosti steče tok $I = U_i/R$ po žicah **in skozi prečko**. Zaradi tega toka I skozi prečko pa na prečko deluje magnetna sila $F_m = I\, a\, B$. Po Lenzovem pravilu je njena smer taka, da zavira gibanje. Pomeni, da kaže nasproti teži.

Ko prečko spustimo, ima na začetku majhno hitrost. Takrat je majhna inducirana napetost, majhen tok in majhna magnetna sila. Teža pospešuje prečko, ki vse hitreje pada. Pri hitrosti $v = v_{max}$ postane magnetna sila nasprotno enaka teži in od takrat naprej je padanje prečke enakomerno. Padanje je podobno, kakor padanje v zraku ob upoštevanju zračnega upora. Le, da da v tem primeru namesto zračnega upora s hitrostjo narašča magnetna sila.

Izenačimo

$$F_g = F_m,$$

vstavimo za $F_g = m\, g$ in $F_m = I\, a\, B = \frac{U_i}{R}\, a\, B = \frac{a\, v_{max}\, B}{R}\, a\, B$. Izrazimo končno hitrost prečke

$$v_{max} = \frac{m\, g\, R}{a^2\, B^2} = \frac{5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}1\,\Omega}{(0{,}4\,\mathrm{m})^2 \cdot (1\,\mathrm{T})^2} = 3{,}1\,\mathrm{cm/s}.$$

5. **Dve enako veliki kroglici naelektrimo tako, da nosi prva naboj $e_1 = 4 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{A\,s}$ in druga $e_2 = -5 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{A\,s}$. Kroglici sta na razdalji $r = 0{,}2\,\mathrm{m}$. Kolikšna je sila F_1 med njima? Ko kroglici staknemo skupaj se naboj porazdeli tako, da vsaka prevzame polovico skupnega naboja. Nato ju razmaknemo na začetno razdaljo. Kolikšna je sedaj sila (F_2) med njima?**

Sila med točkastima nabojema je $F = \frac{e_1\, e_2}{4\,\pi\,\epsilon_0\, r^2}$. Ista zveza velja za silo med razsežnima kroglama, če sta le naboja na krogah enakomerno porazdeljena. Razdalja r je takrat razdalja med središčema krogel.

Odgovor na prvo vprašanje je torej

$$|F_1| = \frac{e_1\, e_2}{4\,\pi\,\epsilon_0\, r^2} = \frac{4 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{A\,s} \cdot 5 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{A\,s}}{4 \cdot \pi \cdot 8{,}9 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}} \cdot (0{,}2\,\mathrm{m})^2} = 0{,}112 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}.$$

Ker sta naboja nasprotnega predznaka, je sila F_1 privlačna.

Ko naboja staknemo, se najprej pozitivni nabolj $4 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{A\,s}$ nevtralizira z negativnim nabojem $-4 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{A\,s}$. Preostane le še $-10^{-8}\,\mathrm{A\,s}$, ki se enakomerno prerazporedi na obe kroglici. Zato sta nova naboja na kroglicah $e_1' = e_2' = -10^{-8}\,\mathrm{A\,s}$. Sila med njima je zdaj odbojna in znaša:

$$|F_2| = \frac{e_1'\, e_2'}{4\,\pi\,\epsilon_0\, r^2} = \frac{10^{-8}\,\mathrm{A\,s} \cdot 10^{-8}\,\mathrm{A\,s}}{4 \cdot \pi \cdot 8{,}9 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V\,m}} \cdot (0{,}2\,\mathrm{m})^2} = 5{,}6 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N}.$$

Pri računanju velikosti sil nismo upoštevali predznakov naboja. Predznaki naboja določajo smer sile (privlačna ali odbojna), ne pa velikosti.

6. **Padalec skoči iz letala in po $s_1 = 50\,\mathrm{m}$ prostega pada odpre padalo. Od tedaj se mu hitrost, s katero pada, enakomerno zmanjšuje s pojemkom $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$. Ob doskoku na tla ima padalec še hitrost $v_2 = 3\,\mathrm{m/s}$. Na kateri višini je padalec odskočil iz letala? Za težnostni pospešek uporabi vrednost $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.**

Prvih $s_1 = 50\,\mathrm{m}$ padanja je prosti pad. Druga del je pa enakomerno pojamajoče gibanje. Iz podatkov za drugi del (pojemajoči) še ne moremo izračunati koliko poti (označimo jo z s_2). Izračunali bomo še kolikšno hitrost doseže padalec po 50 m prostega pada. Ta hitrost (označimo jo z v_0) bo začetna hitrost za pojemajoči del padanja.

Prosti pad: $s_1 = \frac{g\,t_1^2}{2}$, sledi $t_1 = \sqrt{\frac{2\,s_1}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 50\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}} = 3{,}193\,\mathrm{s}$. Potem izračunamo še hitrost po 50 m padanja $v_0 = t_1\,g = 3{,}193\,\mathrm{s}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} = 31{,}3\,\mathrm{m/s}$.

Do istega rezultata lahko pridemo brez računanja časa padanja, če poznamo zvezo $v_2^2 = v_1^2 \pm 2\,a\,x$, ki velja za enakomerno pospešeno ali pojemajoče (z minusom) gibanje. Hitrost v_1 je začetna (v našem primeru enaka 0), hitrost v_2 je hitrost, ki jo telo doseže po opravljeni poti x (v našem primeru je $x = s_1$, "končna" hitrost $v_2 = v_0$ in pospešek $a = g$). Sledi $v_0 = \sqrt{2\,g\,s_1} = \sqrt{2\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 50\,\mathrm{m}} = 31{,}3\,\mathrm{m/s}$.

Zdaj lahko obravnavamo še pojemajoči del. Poznamo začetno hitrost $v_0 = 31{,}3\,\mathrm{m/s}$, pojemek $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$ in končno hitrost $v_2 = 3\,\mathrm{m/s}$. Izračunamo lahko čas pojemanja t_2. Iz $v_2 = v_0 - a\,t_2$ sledi

$$t_2 = \frac{v_0 - v_2}{a} = \frac{31{,}3\,\mathrm{m/s} - 3\,\mathrm{m/s}}{2\,\mathrm{m/s^2}} = 14{,}2\,\mathrm{s}.$$

Pri tem opravi pot

$$s_2 = v_0\,t_2 - \frac{a\,t_2^2}{2} = 31{,}3\,\mathrm{m/s}\cdot 14{,}2\,\mathrm{s} - \frac{2\,\mathrm{m/s^2}\cdot(14{,}2\,\mathrm{s})^2}{2} = 243\,\mathrm{m}.$$

Znov pridemo hitreje do rezultata, če ne računamo časa t_2 in iz zveze $v_2^2 = v_0^2 - 2\,a\,s_2$ izračunamo $s_2 = \frac{v_0^2 - v_2^2}{2\,a} = \frac{(31{,}3\,\mathrm{m/s})^2 - (3\,\mathrm{m/s})^2}{2\cdot 2\,\mathrm{m/s^2}} = 243\,\mathrm{m}$.

Spomnimo se vprašanja, na kateri višini je padalec skočil iz letala? Padalec je skočil iz letala na višini $h = s_1 + s_2 = 50\,\mathrm{m} + 243\,\mathrm{m} = 293\,\mathrm{m}$.

7. **Jekleno kroglico mase $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$ spustimo z višine $h_1 = 30\,\mathrm{m}$, da pade na kamnita tla in se odbije. Po odboju doseže višino $h_2 = 22\,\mathrm{m}$. Za koliko se kroglica segreje, če je prevzela vso sproščeno energijo? Kolikšno višino doseže po drugem odboju, če se takrat segreje za $\Delta T_2 = 0{,}1\,\mathrm{K}$?**

   Preden začne ponovno padati, na tla pod njo hitro nastavimo vzmet dolžine $5\,\mathrm{m}$ s koeficientom vzmeti $k = 10\,\mathrm{kg/s^2}$. Koliko se največ skrči vzmet, ko kroglica pristane na njej, preden se ponovno odbije v zrak? Specifična toplota jekla je $c = 460\,\mathrm{J/kgK}$. Za težnostni pospešek uporabi vrednost $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.

Kroglica je pri prvem "skoku" izgubila $\Delta W = m\,g\,\Delta h = m\,g\,(h_1 - h_2) = 0{,}5\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot(30\,\mathrm{m} - 22\,\mathrm{m}) = 39{,}24\,\mathrm{J}$ mehanske energije, ki se (tako pravi naloga) vsa pretvori v notranjo energijo kroglice. Ta se zato segreje za ΔT_1, tako da je $\Delta W = m\,c\,\Delta T_1$. Sledi

$$\Delta T_1 = \frac{\Delta W}{m\,c} = \frac{39{,}24\,\mathrm{J}}{0{,}5\,\mathrm{kg}\cdot 460\,\mathrm{J/kgK}} = 0{,}171\,\mathrm{K}.$$

Drugo vprašanje je podobno prvemu. Zdaj poznamo $\Delta T_2 = 0{,}1\,\mathrm{K}$ in iščemo Δh_2, to je za koliko je višina po drugem odboju manjša od višine po prvem odboju $h_2 = 22\,\mathrm{m}$! Znova privzamemo, da se vsa sprememba mehanske energije kroglice pretvori v njeno notranjo energijo za segrevanje. Izenačimo

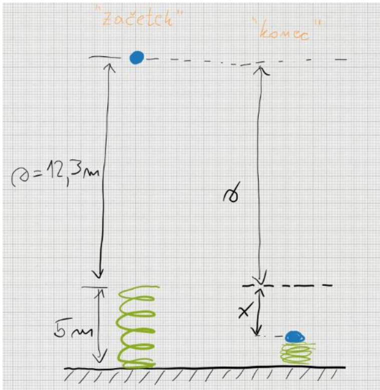
$$m\,c\,\Delta T_2 = m\,g\,\Delta h_2$$

in dobimo

$$\Delta h_2 = \frac{c\,\Delta T_2}{g} = \frac{460\,\mathrm{J/kgK}\cdot 0{,}1\,\mathrm{K}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} = 4{,}7\,\mathrm{m}.$$

Po drugem odboju kroglica doseže višino $h_2 - \Delta h_2 = 22\,\mathrm{m} - 4{,}7\,\mathrm{m} = 17{,}3\,\mathrm{m}$.

Potem podstavimo vzmet. Poglejmo spodnjo skico.



Iz nje odčitamo, da kroglica pada z višine $s = 17{,}3\,\mathrm{m} - 5\,\mathrm{m} = 12{,}3\,\mathrm{m}$ nad vzmetjo. Ko se kroglica v najnižji legi ustavi, se njena višina zmanjša za $s + x$, kjer je x skrček vzmeti. Zato se je potencialna energija kroglice zmanjšala za $m\,g\,(s + x)$. Verjetno avtor naloge predpostavlja, da se v tem delu kroglica ni nič segrela, zato se vsa sprememba potencialne energije pretvori v prožnostno energijo vzmeti $\frac{k\,x^2}{2}$. Izenačimo absolutno vrednost spremembe potencialne energije (ta je negativna) in spremembo prožnostne energije vzmeti ter dobimo kvadratno enačbo za skrček vzmeti x:

$$m\,g\,(s + x) = \frac{k\,x^2}{2}.$$

Po preurejanju sledi

$$x^2 - \frac{2\,m\,g}{k}\,x - \frac{2\,m\,s}{k} = 0$$

oziroma:

$$x^2 - 0{,}981\,\mathrm{m} \cdot x - 12{,}066\,\mathrm{m}^2 = 0.$$

Rešitvi sta $x_1 = 4{,}00\,\mathrm{m}$ in $x_2 = -3{,}02\,\mathrm{m}$. Druga, negativna rešitev v našem primeru pomeni, da se vzmet ne bi skrčila pač pa bi se raztegnila. Ta rešitev v tem primeru ni smiselna.

Odgovor na zastavljeno vprašanje je torej, da se vzmet skrči največ za $4{,}00\,\mathrm{m}$.

8. **Podmornica z maso $m_{podm} = 15\,000\,$ton lebdi v globini $50\,\mathrm{m}$ pod morsko gladino. Kolikšna je prostornina podmornice?**

   Podmornico zadane globinska bomba, zaradi česar vdre vanjo $m_v = 50\,000\,\mathrm{kg}$ vode. S kolikšnim pospeškom se začne podmornica potapljati?

   Po oceni poškodb kapitan odvrže balast s skupno maso $m_{balast} = 100\,000\,\mathrm{kg}$, ki zaseda v podmornici prostor z volumnom $75\,\mathrm{m}^3$. Izpraznjeni prostor zalije voda. Kako se giblje podmornica potem?

   Za težnostni pospešek uporabi vrednost $g = 10\,\mathrm{m/s}^2$. Gostota vode je $\rho_{voda} = 1000\,\mathrm{kg/m}^3$?

Ker podmornica *lebdi* v vodi (50 m globoko je zanesljivo vsa pod vodo), pomeni da sta sili teže podmornice in vzgona nasprotno enaki. Povprečna gostota podmornice je enaka gostoti vode! Torej je prostornina podmornice enaka

$$V = \frac{m_{podm}}{\rho_{voda}} = \frac{15\,000 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}}{1000\,\mathrm{kg/m}^3} = 15\,000\,\mathrm{m}^3.$$

Potem, ko v podmornico vdre 50 000 kg vode, postane podmornica za toliko (50 000 kg) težja. Masa podmornice z dodatno vodo je zdaj $m_2 = 15\,000 \cdot 10^3\,\mathrm{kg} + 50\,000\,\mathrm{kg} = 15\,050\,000\,\mathrm{kg}$. Teža je $F_{g2} = m_2\,g = 150{,}5 \cdot 10^6\,\mathrm{N}$.

Prostornina $V = 15\,000\,\mathrm{m}^3$ se ji ne spremeni, zato ostane vzgon enako velik kakor je bil to zdaj $F_{vzgon2} = \rho_{voda}\,g\,V = 1000\,\mathrm{kg/m}^3 \cdot 10\,\mathrm{m/s}^2 \cdot 15\,000\,\mathrm{m}^3 = 150 \cdot 10^6\,\mathrm{N}$.

Razlika med silo teže in vzgona dá podmornici z maso m_2 pospešek a v smeri navzdol, saj je teža večja od vzgona:

$$F_{g2} - F_{vzgon2} = m_2\,a.$$

Podmornica se začne potapljati s pospeškom

$$a = \frac{F_{g2} - F_{vzgon2}}{m_2} = \frac{150{,}5 \cdot 10^6\,\mathrm{N} - 150 \cdot 10^6\,\mathrm{N}}{15\,050\,000\,\mathrm{kg}} = 0{,}033\,\mathrm{m/s^2}.$$

Potem, ko kapitan odvrže balast izpraznjeni prostor zalije voda. To pomeni, da se volumen podmornice in s tem *izpodrinjene* vode ne spremeni ($V = 15\,000\,\mathrm{m^3}$). Spremeni se pa skupna masa. Zmanjša se za maso balasta in poveča za maso $75\,\mathrm{m^3}$ vode, to je $m_{dodatna\,voda} = \rho_{voda}\,75\,\mathrm{m^3} = 1000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 75\,\mathrm{m^3} = 75\,000\,\mathrm{kg}$. Masa podmornice potem, ko odvržemo balast je

$$m_3 = m_2 - m_{balast} + m_{dodatna\,voda} = 15\,050\,000\,\mathrm{kg} - 100\,000\,\mathrm{kg} + 75\,000\,\mathrm{kg} = 15\,025\,000\,\mathrm{kg}.$$

Kaže, da je teža podmornice z odvrženim balastom in dodatno vodo $F_{g3} = m_3\,g = 150{,}25 \cdot 10^6\,\mathrm{N}$ še vedno večja od vzgona, ki se ni spremenil glede na prejšnji primer $F_{vzgon2} = 150 \cdot 10^6\,\mathrm{N}$. Podmornica se bo še vedno potapljala. Zdaj s pospeškom a_3 za katerega velja:

$$F_{g3} - F_{vzgon2} = m_3\,a_3.$$

Podmornica se z odvrženim balastom potaplja s pospeškom

$$a_3 = \frac{F_{g3} - F_{vzgon2}}{m_3} = \frac{150{,}25 \cdot 10^6\,\mathrm{N} - 150 \cdot 10^6\,\mathrm{N}}{15\,025\,000\,\mathrm{kg}} = 0{,}017\,\mathrm{m/s^2}.$$

9. **S kolikšno hitrostjo bi morali izstreliti svinčeno kroglo mase $m = 3\,\mathrm{kg}$ navpično navzdol z višine $h = 32\,\mathrm{m}$, da bi se ob udarcu v betonska tla v celoti stalila, če bi prevzela celotno končno kinetično energijo? Krogla ima na začetku temperaturo $77\,^\circ\mathrm{C}$. Specifična toplota svinca je $c = 130\,\mathrm{J/kgK}$, talilna toplota $q_t = 23\,\mathrm{kJ/kg}$ in temperatura tališča svinca $327\,^\circ\mathrm{C}$. Za težnostni pospešek uporabi vrednost $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.**

Kroglo izstrelimo navpično navzdol s hitrostjo v_0. Pri tem ima krogla kinetično energijo $\frac{m\,v_0^2}{2}$. Ko pade na tla, se kinetična energija za $m\,g\,h$. Toliko ($\frac{m\,v_0^2}{2} + m\,g\,h$) ima na voljo mehanske energije tik pred padcem. Če se ta vsa energija porabi za segrevanje ($m\,c\,\Delta T$, $\Delta T = (327 - 77)\,\mathrm{K} = 250\,\mathrm{K}$) in taljenje ($m\,q_t$), izenačimo

$$\frac{m\,v_0^2}{2} + m\,g\,h = m\,c\,\Delta T + m\,q_t.$$

Izračunamo hitrost s katero bi morali izstreliti svinčeno kroglo:

$$v_0 = \sqrt{2\,(c\,\Delta T + q_t - g\,h)} = \sqrt{2 \cdot (130\,\mathrm{J/kgK} \cdot 250\,\mathrm{K} + 23 \cdot 10^3\,\mathrm{J/kg} - 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 32\,\mathrm{m})} = 332\,\mathrm{m/s}.$$

10. **Toplotno izoliran kozarec napolnimo s kockami ledu pri temperaturi $T_1 = -5\,^\circ\mathrm{C}$, ki tehtajo $m_{led} = 100\,\mathrm{g}$. Nato dolijemo še $m_{caj} = 200\,\mathrm{g}$ čaja s temperaturo $30\,^\circ\mathrm{C}$. Kaj dobimo, ko se vzpostavi ravnovesje? Specifična toplota ledu je $c_{led} = 2100\,\mathrm{J/kgK}$, talilna toplota ledu $q_t = 336\,\mathrm{kJ/kg}$ ter specifična toplota čaja $c_{caj} = 4200\,\mathrm{J/kgK}$. Gostota vode je $\rho_{voda} = 1\,\mathrm{kg/liter}$.**

Ker je kozarec toplotno izoliran, bo toplota, ki jo oddaja čaj pri hlajenju in morebitnem zmrzovanju, enako velika kakor toplota, ki jo prejme led, ko se segreva, tali in (mogoče) nastala voda še segreva.

V naprej ne vemo ali se bo ves led stalil in potem dobimo mešanico nastale vode in čaja pri neki temperaturi nad $0\,^\circ\mathrm{C}$, ali bo nekaj ledu ostalo nestaljenega.

Zato računajmo po vrsti.

Za to, da ves led segrejemo do $0\,^\circ\mathrm{C}$ rabimo:

$$Q_1 = m_{led}\,c_{led}\,5\,\mathrm{K} = 0{,}1\,\mathrm{kg} \cdot 2100\,\mathrm{J/kgK} \cdot 5\,\mathrm{K} = 1050\,\mathrm{J},$$

kjer je 5 K razlika od začetne temperature ledu ($-5\,^\circ$C) do tališča pri $0\,^\circ$C.

Preverimo koliko toplote se sprosti, če ves čas ohladimo na $0\,^\circ$C:

$$Q_2 = m_{caj}\, c_{caj}\, 30\,\mathrm{K} = 0{,}2\,\mathrm{kg} \cdot 4200\,\mathrm{J/kgK} \cdot 30\,\mathrm{K} = 25\,200\,\mathrm{J},$$

kjer je 30 K razlika od začetne temperature čaja ($30\,^\circ$C) do $0\,^\circ$C.

Ker je sproščena toplota Q_2 večja od toplote Q_1 potrebne za segrevanje ledu, se bo led začel taliti. Za taljenje imamo "na voljo" $Q_2 - Q_1 = 25\,200\,\mathrm{J} - 1050\,\mathrm{J} = 24\,150\,\mathrm{J}$ toplote. Preverimo najprej ali je to dovolj, da se ves led stali.

Za taljenje 0,1 kg ledu bi potrebovali

$$Q_{taljenje\,led} = m_{led}\, q_t = 0{,}1\,\mathrm{kg} \cdot 336\,000\,\mathrm{J/kg} = 33\,600\,\mathrm{J}.$$

Račun pokaže, da nimamo dovolj toplote (24 150 J) na voljo, da bi stali ves led (33 600 J). Stalil se bo le del ledu z maso $m_{staljen\,led}$, ki bo za taljenje porabil razpoložljivo toploto $Q_2 - Q_1 = 24\,150\,\mathrm{J}$:

$$Q_2 - Q_1 = m_{staljen\,led}\, q_t.$$

Sledi

$$m_{staljen\,led} = \frac{Q_2 - Q_1}{q_t} = \frac{24\,150\,\mathrm{J}}{336\,000\,\mathrm{J/kg}} = 0{,}072\,\mathrm{kg}.$$

Povzamimo: ko se vzpostavi ravnovesje (čaj, voda in led imajo enako temperaturo, ni izmenjave toplote z okolico) dobimo mešanico:
200 g čaja,
72 g vode in
28 g ledu
pri $0\,^\circ$C. Nazadnje smo upoštevali, da je skupna masa nastale vode (72 g) in preostalega ledu (28 g) enaka začetni masi ledu (100 g).

11. **Če bakren kovanec segrejemo za $\Delta T = 100\,^\circ$C, se mu radij poveča za 0,18 %. Izračunaj temperaturni koeficient linearnega raztezka in določi, za koliko odstotkov se kovancu poveča prostornina!**

Iz teorije bi naj poznali dolžinsko reztezanje $\Delta l = l\,\alpha\,\Delta T$, ki prav tako opisuje raztezanje polmera ali premera kovanca - vse kar je povezano z eno dimenzijo. Enako bi veljalo za relativno spremembo debeline kovanca zaradi segrevanja.

Tekst naloge nam podaja relativno spremembo $\frac{\Delta r}{r} = 0{,}18\,\% = 0{,}18 \cdot 10^{-2}$. Iz

$$\frac{\Delta r}{r} = \alpha\,\Delta T$$

izračunamo temperaturni koeficient linearnega raztezka

$$\alpha = \frac{\Delta r}{r}\frac{1}{\Delta T} = 0{,}18 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{1}{100\,\mathrm{K}} = 0{,}18 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{K}^{-1} = 1{,}8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}.$$

Ko poznamo temperaturni koeficient linearnega raztezka α, lahko izračunamo temperaturni koeficient prostorninskega raztezka $\beta = 3\,\alpha = 3 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1} = 5{,}4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$.

Relativna sprememba prostornine telesa (kovanca v tem primeru) je potem:

$$\frac{\Delta V}{V} = \beta\,\Delta T = 5{,}4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1} \cdot 100\,\mathrm{K} = 5{,}4 \cdot 10^{-3} = 0{,}54\,\%.$$

Do tega razultata bi lahko prišli krajše, brez računanja temperaturnega koeficienta prostorninskega raztezka β. Velja tako: če je relativni raztezek telesa (kovanca) v eni dimeniziji 0,18 %, potem je relativni prostorninski raztezek istega telesa 3-krat večji.

12. **Potapljač napolni jeklenko za potapljanje s prostornino $V_1 = 10\,$litrov z zrakom pri temperaturi $33\,°$C do tlaka $p_1 = 157\,$bar. Koliko časa lahko potapljač ostane s to jeklenko pod vodo, če porabi vsako minuto $m_{min} = 50\,$g zraka, zaradi varnosti pa naj mu ob koncu potapljanja v jeklenki ostane vsaj 20 % začetne mase zraka? Kolikšen je tlak v jeklenki ob koncu potapljanja, preden izplava na površje? Temperatura vode je $5\,°$C, molska masa zraka pa $M = 29\,$g/mol.**

Rešitev: Naloga je s področja uporabe plinske enačbe. Izračunajmo najprej koliko (m_1) mase zraka imamo v jeklenki na začetku.

Iz plinske enačbe

$$p_1\,V_1 = \frac{m_1}{M}\,R\,T_1,$$

kjer je $R = 8{,}314\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$ splošna plinska konstanta in $T_1 = 306\,$K temperature zraka v jeklenki pred potopom (v plinsko enačbo vedno vstavljamo temperaturo v Kelvinovi skali!), izrazimo:

$$m_1 = \frac{p_1\,V_1\,M}{R\,T_1} = \frac{157\cdot 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}}\cdot 10\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3}\cdot 29\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}}{8{,}314\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}\cdot 306\,\mathrm{K}} = 1790\,\mathrm{g}.$$

Na koncu mora ostati 20 % začetne mase m_1, to je masa $m_2 = 0{,}2\cdot m_1 = 0{,}2\cdot 1790\,\mathrm{g} = 358\,\mathrm{g}$.

Potapljač je torej med potapljanjem smel porabiti $\Delta m = m_1 - m_2 = 1790\,\mathrm{g} - 358\,\mathrm{g} = 1432\,\mathrm{g}$ zraka. Ker vsako minuto porabi 50 g, je vez zrak porabil v času:

$$t = \frac{1432\,\mathrm{g}}{50\,\mathrm{g/min}} = 28{,}6\,\mathrm{min}.$$

Potapljač sme ostati pod vodo 28,6 minut.

Kolikšen je tlak na koncu? Znova uporabimo plinsko enačbo. Zdaj je masa zraka $m_2 = 358\,$g, temperatura $T_2 = 278\,$K (to je $5\,°$C kolikor znaša temperatura vode. Med potapljanjem se namreč jeklenka in zrak v njej ohladita na temperaturo vode), prostornina jeklenke se ni spreminila in ostaja $V_1 = 10\,$litrov. Sledi

$$p_2 = \frac{m_2}{M}\,\frac{R\,T_2}{V_1} = \frac{358\,\mathrm{g}}{29\,\mathrm{g/mol}}\,\frac{8{,}314\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}\cdot 278\,\mathrm{K}}{10\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3}} = 28{,}5\cdot 10^5\,\mathrm{Pa} = 28{,}5\,\mathrm{bar}.$$

Premislimo še o enotah: grami, moli in Kelvini se pokrajšajo. Ostane $\mathrm{J/m^3}$. Ker je $\mathrm{J} = \mathrm{N\,m}$, dobimo $\mathrm{N/m^2}$, kar je Pa.